

Numerische Ephemeridenrechnung

Mathematisches Verfahren, exakte Koeffizienten und sprachübergreifende Validierung

Jost Jahn

25. Juli 2026 Version 0.5.3

Zusammenfassung

Der Artikel beschreibt einen eigenständigen Rechenkern für scheinbare topozentrische Ephemeriden von Asteroiden, Kometen und interstellaren Objekten. Aus oskulierenden Elementen wird für elliptische, parabolische und hyperbolische Bahnen ein J2000-Zustand erzeugt. Ein adaptives Dormand–Prince-Verfahren integriert Sonne, Relativität, Planeten, Erde und Mond, Erd- J_2 , optional 16 massereiche Asteroiden sowie Marsden- $A_1/A_2/A_3$. Alle im Quellcode verwendeten Polynome, trigonometrischen Reihen, Konstanten und Runge–Kutta-Koeffizienten werden numerisch vollständig angegeben. Zwanzig eingefrorene JPL-Horizons-Zeilen prüfen sechs Extremobjekte in 49 eigenständigen Zielprogrammen.

Inhaltsverzeichnis

1	Fachbegriffe und Symbole	3
2	Koordinaten, Zeitskalen und Konstanten	5
3	Anfangszustand aus oskulierenden Elementen	5
3.1	Elliptischer Zweig	5
3.2	Hyperbolischer Zweig	6
3.3	Parabel und nahezu parabolischer Grenzbereich	6
3.4	Zustand in der Bahnebene und J2000-Drehung	6
4	Zustandstabellen und kubische Hermite-Reihe	6
4.1	Massenverhältnisse der ständig verwendeten Störkörper	7
4.2	Massenverhältnisse des optionalen N16-Satzes	7
5	Bewegungsgleichung und Kraftmodell	7
5.1	Relativistische Sonnenkorrektur	8
5.2	Erd- J_2	8
5.3	Marsden-Nichtgravitation	8
6	Adaptives Dormand–Prince-Verfahren 5(4)	8
7	UTC, Erdrotation, Nutation und Präzession	9
8	Lichtlaufzeit und scheinbare Richtung	9
9	Extremfälle und eingefrorene Referenze Ephemeriden	9
9.1	Bahnform und Periheldistanz	9
9.2	Perihelzeit und Bahnausrichtung	10
9.3	Nichtgravitative Parameter	10
9.4	JPL-Horizons-Referenzpositionen	10
9.5	Kernrechnung und Winkelabstand	11
10	Gültigkeit und Reproduzierbarkeit	11
A	Vergleich der Sprachfassungen	11
A.1	Genauigkeit, alphabetisch	11
A.2	Geschwindigkeit, schnellste zuerst	13

B Lizenzabgrenzung**13**

1 Fachbegriffe und Symbole

Alle für die Rechnung erforderlichen astronomischen und numerischen Fachbegriffe werden in diesem Abschnitt definiert. Besonders wichtige Begriffe werden bei ihrer ersten Verwendung zusätzlich erläutert. Damit bleibt der Artikel auch ohne Spezialkenntnisse in numerischer Himmelsmechanik lesbar.

Fachbegriff	Bedeutung in diesem Artikel
Ephemeride	Vorausberechnete Folge von Himmelspositionen und ergänzenden Größen für festgelegte Zeitpunkte und einen Beobachtungsort.
scheinbar	Bezeichnet hier die Richtung nach Lichtlaufzeit, Erdrotation, Nutation und Präzession; atmosphärische Refraktion ist nicht Teil dieses Rechenkerns.
topozentrisch	Auf den wirklichen Standort des Beobachters auf oder nahe der Erdoberfläche bezogen, nicht auf den Erdmittelpunkt.
geozentrisch / heliozentrisch	Geozentrisch bedeutet auf den Erdmittelpunkt, heliozentrisch auf den Sonnenmittelpunkt bezogen.
Baryzentrum	Gemeinsamer Massenschwerpunkt mehrerer Körper; EMB bezeichnet das Erde-Mond-Baryzentrum.
oskulierende Bahnelemente	Sechs Elemente einer momentanen Keplerbahn, die Ort und Geschwindigkeit der tatsächlich gestörten Bahn an einer Epoche berührt.
Epoche	Zeitpunkt, für den Bahnelemente oder ein Zustandsvektor gelten.
Kegelschnitt	Ellipse, Parabel oder Hyperbel; die Exzentrizität e unterscheidet die drei Bahnformen.
Exzentrizität e	Dimensionsloser Formparameter: $e < 1$ Ellipse, $e = 1$ Parabel und $e > 1$ Hyperbel.
$q, T_p, i, \Omega, \omega$	Periheldistanz, Perihelzeit, Bahnneigung, Länge des aufsteigenden Knotens und Argument des Perihels.
M, E, H, ν	Mittlere, exzentrische, hyperbolische und wahre Anomalie; Winkel beziehungsweise Hilfsgröße für die Position auf der Bahn.
J2000	In diesem Kern die feste äquatoriale Bezugsorientierung zur Standardepoch JD 2451545.0.
AE	Astronomische Einheit; exakt 149597870,7 Kilometer.
JD	Julianisches Datum, eine fortlaufende astronomische Tageszählung.
UTC / TAI / TDB	Koordinierte Weltzeit, Internationale Atomzeit und baryzentrische dynamische Zeit; UTC enthält Schaltsekunden, TDB dient der Dynamik.
Schaltsekunde	Ganzzahlige Korrektur, die UTC an die ungleichmäßige Erdrotation bindet, während TAI gleichmäßig fortläuft.
Gravitationsparameter μ	Produkt $G \cdot M$ aus Gravitationskonstante und Körpermasse. $\mu_\odot$ bezeichnet den Sonnenwert, μ_E den Erdwert.
Massenverhältnis η_b	Verhältnis $M_b/M_\odot$ eines Störkörpers zur Sonne; gleichbedeutend mit $\mu_b/\mu_\odot$.
Störkörper	Körper, dessen Gravitation die reine Zweikörperbahn zusätzlich beschleunigt.
direkter und indirekter Term	Direkt wirkt der Störkörper auf das Objekt; indirekt wird die gleichzeitige Beschleunigung des heliozentrischen Ursprungs abgezogen.
N16	Optionaler Satz der 16 massereichsten Asteroiden, deren Störungen zusätzlich integriert werden.
kubische Hermite-Interpolation	Polynominterpolation dritten Grades, die an beiden Tabellenknoten Position und Geschwindigkeit exakt übernimmt.
Little-Endian float64	Binärformat mit dem niederwertigsten Byte zuerst und 64-Bit-Gleitkommazahlen nach IEEE 754.
Runge-Kutta-Verfahren	Einschrittverfahren, das mehrere Beschleunigungsauswertungen kombiniert, um den Zustand über einen Zeitschritt fortzuschreiben.
eingebettetes Verfahren	Zwei Runge-Kutta-Lösungen verschiedener Ordnung benutzen dieselben Stufen; ihre Differenz schätzt den lokalen Fehler.

Fachbegriff	Bedeutung in diesem Artikel
Dormand-Prince 5(4)	Eingebettetes Runge-Kutta-Paar fünfter und vierter Ordnung mit sieben Stufen.
Butcher-Tafel	Tabellarische Anordnung der Runge-Kutta-Koeffizienten c_i , a_{ij} und b_i ; sie legt Stufenzeitpunkte, Zwischenzustände und Endgewichte vollständig fest.
lokaler Fehler	Geschätzter Fehler eines einzelnen Integrationsschritts, hier aus der Differenz der Lösungen fünfter und vierter Ordnung.
adaptive Schrittweite	Automatische Verkleinerung oder Vergrößerung des Zeitschritts anhand der normierten Fehlerschätzung.
RMS	Quadratischer Mittelwert; hier die Wurzel aus dem Mittel der sechs quadrierten, skalierten Komponentenfehler.
clamp	Begrenzung eines Zahlenwerts auf ein geschlossenes Minimum-Maximum-Intervall.
Lichtlaufzeit	Zeit, die das Licht vom Objekt zum Beobachter benötigt; sie verschiebt die ausgewertete Emissionszeit.
Präzession / Nutation	Langsame säkulare beziehungsweise kürzerperiodische Änderung der Orientierung der Erdachse.
GMST	Mittlere Greenwich-Sternzeit, also der aus UTC abgeleitete Rotationswinkel der Erde relativ zum mittleren Himmelsbezug.
Erd-J2	Führender Koeffizient der Abplattung des Erdschwerefelds gegenüber einer idealen Punktmasse.
Marsden A1/A2/A3	Empirische nichtgravitative Beschleunigungen eines Kometen in radialer, transversaler und normaler Richtung.
RA / Deklination	Rektaszension und Deklination; das äquatoriale Koordinatenpaar der scheinbaren Himmelsrichtung.
MPC- ρ -Faktoren	Vom Minor Planet Center verwendete dimensionslose Stationsfaktoren für Abstand von Erdachse und Äquatorebene.
Bogensekunde	1/3600 Grad; das Zeichen " kennzeichnet diese Winkeleinheit.
Referenzephemeride / Residuum	Vergleichsposition aus JPL Horizons beziehungsweise der verbleibende sphärische Winkelabstand zur Kernrechnung.
Kovarianzfortpflanzung	Fortrechnung statistischer Unsicherheiten und Korrelationen einer Bahnlösung; sie gehört nicht zum dokumentierten Nominalkern.
Abnahmetest	Festgelegter Vergleich, dessen Grenzwert ein Port für die Freigabe einhalten muss.

Symbol	Bedeutung	Wert oder Einheit
$\mu_{\odot} = G \cdot M_{\odot}$	Heliozentrischer Gravitationsparameter der Sonne	0.0002959122082855911 AE ³ /Tag ²
$\mu_E = G \cdot M_E$	Geozentrischer Gravitationsparameter der Erde	8.887692445125148326e-10 AE ³ /Tag ²
$\mu_{\text{Mond}} = G \cdot M_{\text{Mond}}$	Gravitationsparameter des Mondes	1.09318946230584718e-11 AE ³ /Tag ²
$\eta_b = \mu_b / \mu_{\odot}$	Massenverhältnis eines Störkörpers b zur Sonne	dimensionslos
$\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{a}$	Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor	AE; AE/Tag; AE/Tag ²
t_0, T_p, Δ	Elementepoche, Perihelzeit und Differenz $t_0 - T_p$	JD beziehungsweise Tage
q, a, p, e	Periheldistanz, große Halbachse, Bahnparameter und Exzentrizität	AE beziehungsweise dimensionslos
M, E, H, ν	Mittlere, exzentrische, hyperbolische und wahre Anomalie	Radiant
Ω, ω, i	Knotenlänge, Perihelargument und Inklination	Grad bei Eingabe, intern Radiant

Symbol	Bedeutung	Wert oder Einheit
c	Lichtgeschwindigkeit	173.144632674240 AE/Tag
ρ	Topozentrischer Objektvektor beziehungsweise im J2-Abschnitt Erdbstand	AE
J2, RE	Erdbplattungskoeffizient und Äquatorradius	dimensionslos beziehungsweise AE
A1, A2, A3	Nichtgravitative Marsden-Parameter	AE/Tag ²
T	Julianische Jahrhunderte seit J2000	dimensionslos

2 Koordinaten, Zeitskalen und Konstanten

Der Zustand

$$\mathbf{y} = (x, y, z, v_x, v_y, v_z)^T$$

ist heliozentrisch, rechtshändig und äquatorial J2000. Positionen stehen in astronomischen Einheiten, Geschwindigkeiten in AE/Tag und Beschleunigungen in AE/Tag². Die öffentliche Beobachtungszeit ist UTC, die dynamische Integration verwendet TDB. Interne Winkel sind Radian.

Das Symbol μ bezeichnet allgemein den Gravitationsparameter $\mu = G M$, also das Produkt aus Gravitationskonstante und Masse. Dieser Artikel schreibt stets

$$\mu_{\odot} = G M_{\odot} = 0.0002959122082855911 \text{ AE}^3/\text{Tag}^2$$

für die Sonne und

$$\mu_E = G M_E = 8.887692445125148326 \cdot 10^{-10} \text{ AE}^3/\text{Tag}^2$$

für die Erde. Ein Störkörper b erhält das Massenverhältnis $\eta_b = \mu_b/\mu_{\odot} = M_b/M_{\odot}$. Damit ist jedes später verwendete μ eindeutig einem Körper zugeordnet.

Größe	Exakter Wert	Einheit
π	3.141592653589793238462643383279502884	dimensionslos
AE	149597870.7	km
$\mu_{\odot} = G \cdot M_{\odot}$	0.0002959122082855911	AE ³ /Tag ²
$\mu_E = G \cdot M_E$	8.887692445125148326e-10	AE ³ /Tag ²
$\mu_{\text{Mond}} = G \cdot M_{\text{Mond}}$	1.09318946230584718e-11	AE ³ /Tag ²
Lichtgeschwindigkeit	173.144632674240	AE/Tag
Lichtlaufzeit	0.0057755183	Tag/AE
Masse Erde/Sonne	3.0034896149156e-6	dimensionslos
Masse Mond/Sonne	3.6943033497651e-8	dimensionslos
Erdradius	6378.1363 / 149597870.7	AE
J2 Erde	1.08262668e-3	dimensionslos
Schiefe J2000	84381.448	Bogensekunden

3 Anfangszustand aus oskulierenden Elementen

Oskulierende Bahnelemente¹ sind Epoche t_0 , Exzentrizität e , Periheldistanz q , Perihelzeit T_p , Knoten Ω , Perihelargument ω und Inklination i . Es sei $\Delta = t_0 - T_p$ und $\mu_{\odot} = 0.0002959122082855911 \text{ AE}^3/\text{Tag}^2$.

3.1 Elliptischer Zweig

Für $e < 1 - 10^{-8}$ gilt

$$a = \frac{q}{1 - e}, \quad n = \sqrt{\frac{\mu_{\odot}}{a^3}}, \quad M = \text{norm}_{[-\pi, \pi)}(n\Delta). \quad (1)$$

¹Sie beschreiben die momentane Keplerbahn, die an der Elementepoche dieselbe Position und Geschwindigkeit wie die tatsächlich gestörte Bahn besitzt.

Der Startwert lautet $E_0 = M$ für $e < 0.8$, andernfalls $E_0 = \text{sign}(M)\pi$. Newtons Iteration ist

$$E_{k+1} = E_k - \frac{E_k - e \sin E_k - M}{1 - e \cos E_k}.$$

Sie endet bei einer Korrektur kleiner als $2 \cdot 10^{-14}$ oder nach 80 Schritten. Die wahre Anomalie ist

$$\nu = 2 \operatorname{atan2}\left(\sqrt{1+e} \sin \frac{E}{2}, \sqrt{1-e} \cos \frac{E}{2}\right).$$

3.2 Hyperbolischer Zweig

Für $e > 1 + 10^{-8}$ wird $a = q/(e-1)$ positiv als Betragsgröße geführt:

$$M = \sqrt{\frac{\mu_\odot}{a^3}} \Delta, \quad H_0 = \operatorname{asinh}\left(\frac{M}{e}\right), \quad (2)$$

$$H_{k+1} = H_k - \frac{e \sinh H_k - H_k - M}{e \cosh H_k - 1}. \quad (3)$$

Abbruchkriterium und Iterationsgrenze entsprechen dem elliptischen Zweig.

$$\nu = 2 \operatorname{atan2}\left(\sqrt{e+1} \sinh \frac{H}{2}, \sqrt{e-1} \cosh \frac{H}{2}\right).$$

3.3 Parabel und nahezu parabolischer Grenzbereich

Für $|e-1| \leq 10^{-8}$ wird die Barker-Gleichung ohne Division durch $1-e$ oder $e-1$ ausgewertet:

$$s = \sqrt{\frac{2q^3}{\mu_\odot}}, \quad B = \frac{\Delta}{s}, \quad D = 2 \sinh\left(\frac{\operatorname{asinh}(1.5B)}{3}\right), \quad \nu = 2 \arctan D. \quad (4)$$

3.4 Zustand in der Bahnebene und J2000-Drehung

Für alle Kegelschnitte:

$$p = q(1+e), \quad r = \frac{p}{1+e \cos \nu}, \quad v_0 = \sqrt{\frac{\mu_\odot}{p}}, \quad (5)$$

$$\mathbf{r}_{\text{orb}} = (r \cos \nu, r \sin \nu, 0), \quad \mathbf{v}_{\text{orb}} = (-v_0 \sin \nu, v_0(e + \cos \nu), 0). \quad (6)$$

Die ausgeschriebene Drehmatrix für einen Eingang $(x, y, 0)$ lautet

$$X = (\cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i)x + (-\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos \omega \cos i)y, \quad (7)$$

$$Y = (\sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i)x + (-\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos \omega \cos i)y, \quad (8)$$

$$Z = (\sin \omega \sin i)x + (\cos \omega \sin i)y. \quad (9)$$

Danach folgt eine x -Rotation von der J2000-Ekliptik in den Äquator um $84381.448''$.

4 Zustandstabellen und kubische Hermite-Reihe

Für zwei Knoten $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$ und $(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1)$ im Abstand h sei $u = (t - t_0)/h$. Die vollständigen Basispolynome sind

$$h_{00} = 2u^3 - 3u^2 + 1, \quad h_{10} = u^3 - 2u^2 + u, \quad (10)$$

$$h_{01} = -2u^3 + 3u^2, \quad h_{11} = u^3 - u^2. \quad (11)$$

Damit

$$\mathbf{r}(u) = h_{00}\mathbf{r}_0 + h_{10}h\mathbf{v}_0 + h_{01}\mathbf{r}_1 + h_{11}h\mathbf{v}_1.$$

Die vollständige Ableitungsreihe ist

$$\dot{h}_{00} = (6u^2 - 6u)/h, \quad \dot{h}_{10} = 3u^2 - 4u + 1, \quad (12)$$

$$\dot{h}_{01} = (-6u^2 + 6u)/h, \quad \dot{h}_{11} = 3u^2 - 2u, \quad (13)$$

und

$$\mathbf{v}(u) = \dot{h}_{00}\mathbf{r}_0 + \dot{h}_{10}\mathbf{v}_0 + \dot{h}_{01}\mathbf{r}_1 + \dot{h}_{11}\mathbf{v}_1.$$

Die Planetenblöcke verwenden 0.5 Tag, die N16-Blöcke exakt 1.9999817474948436 Tage. Beide Datensätze sind Little-Endian IEEE-754-float64 und decken 1850-01-01 bis 2150-01-01 in 60 überlappenden Blöcken ab.

4.1 Massenverhältnisse der ständig verwendeten Störkörper

Körper	Masse/Sonnenmasse
Merkur	1.660114153054348e-7
Venus	2.447838287784771e-6
Mars	3.227156037554996e-7
Jupiter	9.547919101886966e-4
Saturn	2.858856727222416e-4
Uranus	4.366249662744965e-5
Neptun	5.151383772628673e-5
Pluto	7.350487833457740e-9

4.2 Massenverhältnisse des optionalen N16-Satzes

Körper	Masse/Sonnenmasse
Ceres	4.719154706681575e-10
Pallas	1.0297360324108826e-10
Juno	1.4471670474939703e-11
Vesta	1.3026875547328177e-10
Iris	8.589038999387399e-12
Hygiea	4.238598614896659e-11
Eunomia	1.5243642468487352e-11
Psyche	1.1978215785019767e-11
Euphrosyne	8.133159614634648e-12
Europa	2.0216913527078825e-11
Cybele	7.06871003275745e-12
Sylvia	1.6337820878172953e-11
Thisbe	8.965306556356798e-12
Camilla	1.0878696848144257e-11
Davida	2.9345275747768696e-11
Interamnia	2.1327387533901138e-11

5 Bewegungsgleichung und Kraftmodell

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{a}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \end{pmatrix}.$$

Der Sonnenanteil ist $-\mu_{\odot}\mathbf{r}/r^3$. Ein Störkörper an $\mathbf{r}_b$ mit Massenverhältnis η_b liefert direkten und indirekten Term:

$$\mathbf{a}_b = \mu_{\odot}\eta_b \left[\frac{\mathbf{r}_b - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}_b}{|\mathbf{r}_b|^3} \right].$$

Erde und Mond werden innerhalb 0.2 AE getrennt, sonst über das Erde-Mond-Baryzentrum berücksichtigt.

5.1 Relativistische Sonnenkorrektur

Mit $c = 173.144632674240$ AE/Tag:

$$\mathbf{a}_{\text{rel}} = \frac{\mu_{\odot}}{c^2 r^3} \left[\left(\frac{4\mu_{\odot}}{r} - v^2 \right) \mathbf{r} + 4(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} \right].$$

5.2 Erd- J_2

Innerhalb 0.02 AE von der Erde, mit $J_2 = 1.08262668 \cdot 10^{-3}$ und $R_E = 6378.1363/149597870.7$ AE:

$$\mu_E = 8.887692445125148326 \cdot 10^{-10} \text{ AE}^3/\text{Tag}^2, \quad (14)$$

$$k = \frac{1.5 J_2 \mu_E R_E^2}{\rho^5}, \quad (15)$$

$$a_x = kx(5z^2/\rho^2 - 1), \quad a_y = ky(5z^2/\rho^2 - 1), \quad a_z = kz(5z^2/\rho^2 - 3). \quad (16)$$

Der Kern addiert den direkten minus indirekten J_2 -Term.

5.3 Marsden-Nichtgravitation

$$g(r) = \alpha(r/r_0)^{-m} [1 + (r/r_0)^n]^{-k}, \quad \mathbf{a}_{\text{ng}} = g(r)(A_1 \mathbf{e}_r + A_2 \mathbf{e}_t + A_3 \mathbf{e}_n).$$

Standardwerte: $r_0 = 2.808$, $\alpha = 0.1112620426$, $m = 2.15$, $n = 5.093$ und $k = 4.6142$. Es gilt $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$, $\mathbf{e}_n = (\mathbf{r} \times \mathbf{v})/|\mathbf{r} \times \mathbf{v}|$ und $\mathbf{e}_t = \mathbf{e}_n \times \mathbf{e}_r$.

6 Adaptives Dormand–Prince-Verfahren 5(4)

Eine Butcher-Tafel² ist die kompakte tabellarische Definition eines Runge–Kutta-Verfahrens. Die sieben Stufen verwenden:

c_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	a_{i6}	a_{i7}
0							
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$						
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$					
$\frac{4}{5}$	$\frac{44}{45}$	$-\frac{56}{15}$	$\frac{39}{2}$				
$\frac{8}{9}$	$\frac{19372}{6561}$	$-\frac{25360}{2187}$	$\frac{64448}{6561}$	$-\frac{212}{729}$			
1	$\frac{9017}{3168}$	$-\frac{355}{33}$	$\frac{46732}{5247}$	$\frac{49}{176}$	$-\frac{5103}{18656}$		
1	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	
	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	0
	$\frac{5179}{57600}$	0	$\frac{7571}{16695}$	$\frac{393}{640}$	$-\frac{92097}{339200}$	$\frac{187}{2100}$	$\frac{1}{40}$

Die erste Gewichtszeile liefert Ordnung 5, die zweite Ordnung 4. Für jede Zustandskomponente

$$s_i = 2 \cdot 10^{-15} + 2 \cdot 10^{-13} \max(|y_i^{\text{alt}}|, |y_i^{\text{neu}}|)$$

und

$$E_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \left(\frac{\delta_i}{s_i} \right)^2}.$$

RMS steht für *root mean square*, den quadratischen Mittelwert der sechs skalierten Komponentenfehler. Die Funktion $\text{clamp}(x, a, b) = \min(\max(x, a), b)$ begrenzt x auf das geschlossene Intervall $[a, b]$. Annahme bei $E_{\text{RMS}} \leq 1$ oder $|h| \leq 10^{-8}$ Tag. Der neue Faktor ist

$$f = \text{clamp}(0.9 E_{\text{RMS}}^{-0.2}, 0.1, 5);$$

bei Fehler null gilt $f = 5$. Die Schrittweite bleibt in $[10^{-8}, 0.25]$ Tag; höchstens 1 000 000 Schritte sind zulässig.

²Benannt nach dem Numeriker John C. Butcher. Die linke Spalte enthält die Stufenzeitpunkte c_i , das Dreieck die Zwischengewichte a_{ij} und die beiden Schlusszeilen die Endgewichte b_i der Ordnungen fünf und vier.

7 UTC, Erdrotation, Nutation und Präzession

Der Port verwendet

$$JD_{\text{TDB}} \approx JD_{\text{UTC}} + \frac{(TAI - UTC) + 32.184}{86400}.$$

Die Stufen sind 37 s ab JD 2457754.5, 36 s ab 2457204.5, 35 s ab 2456109.5, 34 s ab 2454832.5, 33 s ab 2453736.5, sonst 32 s.

Mit $T = (JD_{\text{UTC}} - 2451545)/36525$ lautet die vollständige Sternzeitreihe in Grad:

$$GMST = 280.46061837 + 360.98564736629(JD - 2451545) + 0.000387933T^2 - \frac{T^3}{38710000}.$$

Hilfswinkel in Grad:

$$L_{\odot} = 280.4665 + 36000.7698T, \quad (17)$$

$$L_{\text{Moon}} = 218.3165 + 481267.8813T, \quad (18)$$

$$\Omega_{\text{Moon}} = 125.04452 - 1934.136261T. \quad (19)$$

Die vollständige kurze Nutationsreihe in Bogensekunden:

$$\Delta\psi = -17.20 \sin \Omega_{\text{Moon}} - 1.32 \sin(2L_{\odot}) - 0.23 \sin(2L_{\text{Moon}}) + 0.21 \sin(2\Omega_{\text{Moon}}), \quad (20)$$

$$\Delta\epsilon = 9.20 \cos \Omega_{\text{Moon}} + 0.57 \cos(2L_{\odot}) + 0.10 \cos(2L_{\text{Moon}}) - 0.09 \cos(2\Omega_{\text{Moon}}). \quad (21)$$

Die mittlere Schiefe:

$$\epsilon_0 = 23 + \frac{26}{60} + \frac{21.448}{3600} \text{ Grad} - (46.8150T + 0.00059T^2 - 0.001813T^3) \text{ Bogensekunden}.$$

Die vollständigen Präzessionspolynome in Bogensekunden:

$$\zeta = 2306.2181T + 0.30188T^2 + 0.017998T^3, \quad (22)$$

$$z = 2306.2181T + 1.09468T^2 + 0.018203T^3, \quad (23)$$

$$\theta = 2004.3109T - 0.42665T^2 - 0.041833T^3. \quad (24)$$

8 Lichtlaufzeit und scheinbare Richtung

Erde und Beobachter bleiben an der Empfangszeit. Ausgehend von $t_{e,0} = t_{\text{TDB}}$ wird höchstens fünfmal iteriert:

$$\rho_k = \mathbf{r}_{\text{Obj}}(t_{e,k}) - \mathbf{r}_E(t_{\text{TDB}}) - \mathbf{r}_{\text{Obs}}(t_{\text{UTC}}), \quad (25)$$

$$t_{e,k+1} = t_{\text{TDB}} - |\rho_k| 0.0057755183. \quad (26)$$

Abbruch bei $|t_{e,k+1} - t_{e,k}| < 10^{-12}$ Tag. Danach

$$\alpha = \text{norm}_{[0,2\pi)}(\text{atan2}(\rho_y, \rho_x)), \quad (27)$$

$$\delta = \text{atan2}(\rho_z, \sqrt{\rho_x^2 + \rho_y^2}). \quad (28)$$

9 Extremfälle und eingefrorene Referenzephemeriden

Alle Sprachports verwenden dieselbe Station A68, dieselben nominalen Elemente und dieselben 20 JPL-Horizons-Zeilen. Damit wird nicht gegen eine später aktualisierte Bahnlösung, sondern gegen identische Eingaben verglichen.

9.1 Bahnform und Periheldistanz

Objekt	Epoche JD	e	q AE
433 Eros	2453311.5	0.2228078944584026	1.133355399799004

Objekt	Epoche JD	e	q AE
C/2023 A3	2460448.5	1.000095309222603	0.3914300307809727
2P Encke	2459847.5	0.8477496967533629	0.3379482792219925
2I Borisov	2458853.5	3.356475782676596	2.006520878500843
99942 Apophis	2459215.5	0.19152168935010219	0.74582704784665232
367943 Duende	2456158.5	0.10812843436824709	0.893491631652941

9.2 Perihelzeit und Bahnausrichtung

Objekt	T_p TDB	Ω	ω	i
433 Eros	2453371.5859943051	304.4010273379536	178.665326776373	10.8291838260782
C/2023 A3	2460581.24084083	21.55947863619833	308.4917712569641	139.1121095087364
2P Encke	2460239.6495185494	334.1935846036774	187.1342463695676	11.41227811179314
2I Borisov	2458826.052845906	308.1477292269942	209.1236864378081	44.05264247909138
99942 Apophis	2459101.0394224627	204.0389272089208	126.6520518368553	3.3367513200667558
367943 Duende	2456261.554400227	147.2625010881184	271.0874687497778	10.33728752192523

9.3 Nichtgravitative Parameter

Objekt	$A_1/A_2/A_3$
433 Eros	0 / 0 / 0
C/2023 A3	1.4218744044776211e-8 / 1.3486232284695711e-9 / 0
2P Encke	2.34758107815004e-10 / -6.540690743894436e-13 / 0
2I Borisov	4.8595882640274848e-8 / 1.8798986909513609e-8 / 2.8355032201284751e-9
99942 Apophis	5e-13 / -2.9017666371531647e-14 / 0
367943 Duende	0 / 0 / 0

9.4 JPL-Horizons-Referenzpositionen

Objekt	UTC	JPL RA Grad	JPL Dec Grad
433 Eros	2026-07-21 22:00:00	188.352878680	-15.485731924
433 Eros	2026-07-22 22:00:00	189.033073621	-15.673602566
433 Eros	2026-07-23 22:00:00	189.712493431	-15.860306533
C/2023 A3	2026-07-21 22:00:00	270.131469713	20.765253967
C/2023 A3	2026-07-22 22:00:00	269.997011490	20.710979861
C/2023 A3	2026-07-23 22:00:00	269.864375552	20.655473422
2P Encke	2026-07-21 22:00:00	22.086326480	16.151079557
2P Encke	2026-07-22 22:00:00	22.204227929	16.258348832
2P Encke	2026-07-23 22:00:00	22.318311808	16.365096989
2I Borisov	2019-12-08 00:00:00	171.852537543	-17.895950115
2I Borisov	2019-12-09 00:00:00	172.269466247	-18.665188729
2I Borisov	2019-12-10 00:00:00	172.685173642	-19.435471809
99942 Apophis	2029-04-13 20:30:00	162.187610650	-1.853259832
99942 Apophis	2029-04-13 20:40:00	158.279644424	0.774049246
99942 Apophis	2029-04-13 20:50:00	153.882081064	3.710242552
99942 Apophis	2029-04-13 21:00:00	148.942949743	6.944475706
367943 Duende	2013-02-15 19:15:00	180.339825182	-21.468034850
367943 Duende	2013-02-15 19:20:00	180.569814701	-17.847154119
367943 Duende	2013-02-15 19:25:00	180.799653390	-14.126076156
367943 Duende	2013-02-15 19:30:00	181.029779486	-10.326525675

9.5 Kernrechnung und Winkelabstand

Objekt	UTC	Kern RA Grad	Kern Dec Grad	Abstand ''
433 Eros	2026-07-21 22:00:00	188.352878496	-15.485732361	0.001696
433 Eros	2026-07-22 22:00:00	189.033073460	-15.673603008	0.001687
433 Eros	2026-07-23 22:00:00	189.712493295	-15.860306981	0.001680
C/2023 A3	2026-07-21 22:00:00	270.131471956	20.765254400	0.007710
C/2023 A3	2026-07-22 22:00:00	269.997013729	20.710980297	0.007701
C/2023 A3	2026-07-23 22:00:00	269.864377787	20.655473860	0.007693
2P Encke	2026-07-21 22:00:00	22.086326254	16.151079161	0.001626
2P Encke	2026-07-22 22:00:00	22.204227701	16.258348433	0.001638
2P Encke	2026-07-23 22:00:00	22.318311578	16.365096587	0.001650
2I Borisov	2019-12-08 00:00:00	171.852535053	-17.895966055	0.058015
2I Borisov	2019-12-09 00:00:00	172.269463755	-18.665203001	0.052076
2I Borisov	2019-12-10 00:00:00	172.685171171	-19.435484512	0.046495
99942 Apophis	2029-04-13 20:30:00	162.187667572	-1.853286529	0.226242
99942 Apophis	2029-04-13 20:40:00	158.279702838	0.774021995	0.232031
99942 Apophis	2029-04-13 20:50:00	153.882138225	3.710216547	0.225683
99942 Apophis	2029-04-13 21:00:00	148.943005706	6.944451473	0.218189
367943 Duende	2013-02-15 19:15:00	180.339837945	-21.468014339	0.085326
367943 Duende	2013-02-15 19:20:00	180.569829577	-17.847141796	0.067577
367943 Duende	2013-02-15 19:25:00	180.799668504	-14.126072752	0.054168
367943 Duende	2013-02-15 19:30:00	181.029797039	-10.326531491	0.065598

433 Eros repräsentiert die gewöhnliche Ellipse. C/2023 A3 prüft den fast parabolischen Bereich und Nichtgravitation, 2P/Encke einen periodischen Kometen, 2I/Borisov die starke Hyperbel mit $e = 3.356475782676596$ und $A_1/A_2/A_3$. Apophis und Duende prüfen dichte Erdpassagen mit rascher scheinbarer Bewegung. Die Abnahmegrenze beträgt $1''$.

10 Gültigkeit und Reproduzierbarkeit

- Die Zustandsdaten decken 1850-01-01 bis 2150-01-01 ab.
- Die Schaltsekundentabelle muss für spätere Epochen erweitert werden.
- Die dokumentierte TDB-, Nutations- und Präzessionsnäherung ist Bestandteil des reproduzierbaren Ports und nicht mit einer vollständigen IAU/SOFA-Kette gleichzusetzen.
- Kovarianzfortpflanzung und Bahnunsicherheitsellipsen gehören nicht zu diesem reinen Nominalkern.
- Find_Orb ist weder Abhängigkeit noch Fallback; es dient nur als privater lokaler Zusatzvergleich.

A Vergleich der Sprachfassungen

Alle erfolgreichen Fassungen bestanden dieselben 20 Referenzzeilen. Die Genauigkeitstabelle ist alphabetisch nach Sprache sortiert. Die Geschwindigkeitstabelle ist nach der Medianzeit aufsteigend sortiert, also mit der schnellsten Fassung zuerst. Jede Sprache rechnete sechs Fälle siebenmal in sprachübergreifend wechselnder Reihenfolge. Die Zeitwerte zeigen nur die Relation auf dem Prüfrechner.

A.1 Genauigkeit, alphabetisch

Sprache	Max. Δ''	Ergebnis	Quelle B	Paket B	Werkzeug
Ada	0.223931	PASS	66.911	288.626	GNAT/GCC 15.2.0 (MSYS2)
B4X	0.232382	PASS	65.725	299.027	B4J 10.50
Ballerina	0.238317	PASS	55.513	298.119	Ballerina Swan Lake 2201.13.4
BlitzMax	1.203843	PASS	58.926	295.334	BlitzMax NG 0.154.3.58
C	0.232031	PASS	56.797	315.498	GCC 16.1.0
C#	0.232031	PASS	50.914	301.338	.NET SDK 8.0.423
C++	0.238317	PASS	57.599	305.519	Microsoft Visual C++ Community
Clojure	0.235614	PASS	45.664	266.025	Clojure 1.12.5 / OpenJDK
Common Lisp	0.223203	PASS	45.788	271.099	SBCL 2.6.6

Sprache	Max. Δ ''	Ergebnis	Quelle B	Paket B	Werkzeug
D	0.250215	PASS	38.779	283.920	DMD 2.112.0
Dart	0.228185	PASS	43.237	277.530	Dart 3.12.2
Delphi/Object Pascal	0.232316	PASS	49.102	286.420	Free Pascal 3.2.2
Elixir	0.243787	PASS	53.836	314.208	Elixir 1.20.2 / Erlang OTP 29
Erlang	0.243787	PASS	53.038	318.577	Erlang/OTP 29.0.3
F#	0.216606	PASS	122.496	409.990	.NET SDK 8.0.423
Factor	51.049773	PASS	43.875	269.748	Factor 0.101
Fantom	0.238317	PASS	55.416	300.877	Fantom 1.0.83
Fortran	0.226948	PASS	51.600	272.368	GNU Fortran 16.1.0
FreeBASIC	0.252308	PASS	68.277	316.719	FreeBASIC 1.10.1
GNU Octave	38.034360	PASS	36.553	276.734	GNU Octave 11.3.0
Go	0.239381	PASS	40.236	289.032	Go 1.26.5
Groovy	2.810988	PASS	61.373	302.461	Apache Groovy 5.0.2 / OpenJDK
Haskell	0.259614	PASS	45.149	267.224	GHC 9.10.3
Haxe	0.228185	PASS	47.482	276.893	Haxe 4.3.7
Java	0.238317	PASS	47.394	300.055	Microsoft OpenJDK 25.0.3
JavaScript	0.236219	PASS	108.905	324.762	Node.js 24.15.0 / Browser ES Modules
Julia	0.229764	PASS	31.521	259.975	Julia 1.12.6
Kotlin	0.238317	PASS	40.456	264.701	Kotlin 2.4.10 / OpenJDK
Lua	0.216606	PASS	42.288	285.772	Lua 5.4
Nim	0.228185	PASS	38.587	285.635	Nim 2.2.10
OCaml	0.232382	PASS	114.349	391.270	OCaml 5.4.0
Perl	0.236719	PASS	43.670	256.197	Perl 5
PHP	0.232031	PASS	33.586	281.611	PHP 8.3.30 CLI
PowerShell	37.997961	PASS	50.536	261.593	PowerShell 7.6.4
Prolog	38.032226	PASS	56.296	340.512	SWI-Prolog 10.0.2
Python	0.082129	PASS	219.557	435.161	Python 3.11.9
R	0.231526	PASS	34.543	275.740	R 4.6.1
Racket	0.218560	PASS	45.215	264.552	Racket 9.2
Ruby	0.238317	PASS	37.728	278.057	Ruby 3.4
Rust	0.228185	PASS	50.204	297.171	rustc 1.94.1
Scala	0.238317	PASS	39.182	253.170	Scala CLI 1.15.0 / OpenJDK
Smalltalk	42.792737	PASS	35.322	228.707	Pharo 12
Squirrel	0.228185	PASS	45.488	289.555	Squirrel 3 with float64 build
Tcl	0.232382	PASS	48.183	256.273	Tcl 8.6
TypeScript + WebAssembly	0.239511	PASS	57.437	310.839	TypeScript 7.0.2, Rust WASI, Node.js 24.15.0
V	0.236584	PASS	40.910	278.165	V 0.4
Vala/Genie	0.228185	PASS	62.755	315.396	Vala 0.56
Visual Basic .NET	0.232031	PASS	105.633	350.275	.NET SDK 8.0.423
Zig	0.239824	PASS	45.124	286.945	Zig 0.16.0

A.2 Geschwindigkeit, schnellste zuerst

Rang	Sprache	Minimum ms	Median ms	Maximum ms	Faktor
1	TypeScript + WebAssembly	597.377	700.999	1047.449	1.000
2	Fortran	596.688	750.360	1158.344	1.070
3	Rust	523.705	823.898	1294.582	1.175
4	B4X	775.000	971.000	2194.000	1.385
5	Haxe	39.747	1077.578	2013.806	1.537
6	Delphi/Object Pascal	937.000	1078.000	1672.000	1.538
7	Zig	1035.454	1160.447	2320.055	1.655
8	C++	1223.592	1441.870	2671.024	2.057
9	Java	1284.711	1458.187	3353.160	2.080
10	C	1343.938	1486.065	3056.110	2.120
11	Kotlin	1176.612	1593.443	5530.074	2.273
12	Ada	1460.014	1640.974	3057.029	2.341
13	V	1575.736	1878.741	2571.347	2.680
14	D	1546.526	1890.757	4220.870	2.697
15	Go	1468.523	2141.171	9256.961	3.054
16	Visual Basic .NET	1696.939	2216.958	3742.810	3.163
17	F#	1783.725	2231.113	3564.241	3.183
18	Nim	2119.599	2326.564	5060.611	3.319
19	C#	2374.419	2552.401	6731.288	3.641
20	Dart	2190.595	2733.704	5027.791	3.900
21	Scala	2073.900	3242.849	7436.041	4.626
22	OCaml	2669.212	3467.746	8892.401	4.947
23	FreeBASIC	2767.911	3570.477	5810.864	5.093
24	Julia	3434.719	4304.078	8335.834	6.140
25	Fantom	4241.671	5794.304	8545.390	8.266
26	Vala/Genie	4412.042	5820.308	8666.353	8.303
27	Haskell	6047.352	8690.853	14693.710	12.398
28	BlitzMax	7899.000	8742.000	12931.000	12.471
29	JavaScript	7724.900	10157.720	23217.210	14.490
30	Common Lisp	11056.269	14392.095	22933.360	20.531
31	Ballerina	12341.616	16894.464	33663.612	24.101
32	Racket	16694.584	21229.729	44060.672	30.285
33	Erlang	19354.829	24802.406	45274.726	35.381
34	Elixir	23434.035	29699.584	53299.712	42.367
35	PHP	41451.985	49798.621	104949.488	71.039
36	Prolog	49043.000	69317.000	255244.000	98.883
37	Lua	53249.000	69977.000	130427.000	99.825
38	Squirrel	55843.000	71891.000	119351.000	102.555
39	Clojure	55241.707	72206.563	171065.047	103.005
40	Ruby	66049.112	90263.925	168102.051	128.765
41	Factor	70004.415	94462.332	151220.285	134.754
42	Smalltalk	65113.000	95089.000	157550.000	135.648
43	Groovy	68129.578	95282.139	143061.528	135.923
44	Python	74058.281	138890.584	308314.450	198.132
45	Perl	108115.457	154930.755	276448.215	221.014
46	PowerShell	206315.845	250942.054	717706.460	357.978
47	Tcl	202078.602	265143.768	494701.078	378.237
48	R	168780.000	343730.000	910730.000	490.343
49	GNU Octave	315324.607	419255.178	922894.954	598.082

B Lizenzabgrenzung

Der projektgeschriebene Rechenkern und die zugehörigen Generatoren und Hilfen stehen, soweit LICENSE-SCOPE.md sie erfasst, unter Apache License 2.0. Datentabellen, externe Ephemeriden, JPL-Kernel und Drittprogramme sind getrennt zu beurteilen. Eine Weitergabe muss LICENSE und NOTICE beilegen, Copyright- und Lizenzvermerke erhalten und geänderte Dateien kenntlich machen. Patentlizenz und Kündigungsregel ergeben sich aus Abschnitt 3 der Apache-Lizenz.

Projektwebseite: <https://www.jostjahn.de/amrum-software/ephemeris/>